Wilhelm M. Bauer

GRUNDLAGEN DER WIRBEL-PHYSIK

Zusammenfassung

Leider werden in der Strömungslehre grundlegende Begriffe, wie Geschwindigkeit und Beschleunigung, nicht mit der erforderlichen Exaktheit festgelegt, was zu falschen Schlussfolgerungen führt. Nach Beseitigung dieses Mangels durch klare Definitionen wird der Wirbelbau besprochen, wobei es sich zeigt, dass einer Wirbelkerngrenzschicht, als Sitz des Lambvektors, besondere Bedeutung zukommt. Unter gegebenen Voraussetzungen kann es aus Stabilitätsgründen zu spontanen, von äusseren Einwirkungen weitgehend unabhängigen Wirbelbildungen kommen. Der Vorgang ist mit Entropievernichtung verbunden und fällt daher nicht in den Gültigkeitsbereich des 2.Hauptsatzes der Wärmelehre. Das ist, klassisch betrachtet, von entscheidender Bedeutung für das gesamte Naturgeschehen, denn in klassischer Sicht beherrschen Wirbelgesetze den Mikro- wie den Makrokosmos, von den Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik über die Teilchen- und Atomphysik, die physikalische Chemie, die Biologie und Meteorologie, bis zur Astrophysik und Kosmologie.

ISBN 3-900371-31-2

Reihe: KLASSISCHE PHYSIK ISSN 0256-1867

GRUNDLAGEN DER WIRBELPHYSIK

ISBN 3-900371-31-2

Was den Gang der Welt
für alle Zeiten aufrecht hält,

ist die Vernichtung von Entropie
durch jede junge Galaxie.

1. Grundbegriffe:

1. Jeder Strömungsvorgang lässt sich zerlegen in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Anteil, so wie sich das elektromagnetische Feld in einen elektrischen und einen magnetischen Anteil zerlegen lässt.

2. Der wirbelfreie Anteil einer Strömung wird durch Stromlinien beschrieben, die in jedem Punkt die augenblickliche Richtung der Geschwindigkeit $\vec{w}$ angeben. Der quellenfreie Anteil wird durch Wirbellinien, rot $\vec{w}$-Linien, beschrieben, die in jedem Punkt die augenblickliche Richtung der Drehachse lokaler Drehungen angeben.

3. Bahnlinien kleinster Masseteilchen sind nur bei stationärer Strömung mit Stromlinien identisch. Für den Augenblick der Beobachtung haben aber Bahn- und Stromlinien in jedem Punkt, auch bei nichtstationärer Strömung, eine gemeinsame Tangente.

4. Im Inneren eines Mediums mit vernachlässigbarer Zähigkeit können Wirbellinien weder beginnen noch enden. Entweder sind sie in sich geschlossen oder sie beginnen und enden an Grenzflächen.

5. Ein Bündel von Wirbellinien beschreibt einen Wirbelfaden. Ein Wirbelfaden besteht stets aus den gleichen Masseteilchen, auch wenn er sich fortbewegt oder seine Form ändert (Helmholtz). Für den Vorgang der Bildung oder Vernichtung eines Wirbelfadens ist eine, wenn auch sehr kleine Zähigkeit nicht vernachlässigbar.

6. Ist die Umgebung eines Wirbelfadens wirbelfrei, so bezeichnet man den Faden als Wirbelkern und die ihn umkreisende Strömung als Wirbelfeld oder Potentialwirbel.

7. Das den Wirbelkern einmal umschliessende Wegintegral der Ge-

schwindigkeit, genannt Zirkulation oder Wirbelstärke Γ, ist für den betrachteten Faden konstant und unabhängig von der Wahl des Integrationswegs.

8. Im stabilen, stationären Zustand überlagert sich der Drehung eines Wirbelkerns eine achsparallele Strömung. Bei der so entstehenden, nach Beltrami benannten Strömung verlaufen Strom- und Wirbellinien bei Rechtsschraubung parallel, bei Linksschraubung antiparallel.

9. Ein stabiler Wirbelring besitzt, wegen dieser achsparallelen Strömungskomponente, einen Eigendrehimpuls oder Spin. Während der Ringdurchmesser eine Funktion der Translationsgeschwindigkeit des Wirbelrings ist und mit wachsender Translationsgeschwindigkeit kleiner wird, bleibt der Spin, aus Gründen der Drehimpulserhaltung, ungeändert.

2. Geschwindigkeit, Beschleunigung:

1. Die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{w}$ ist definiert als die auf die Zeit t bezogene Verschiebung $\vec{s}$ eines kleinen Masseteilchens.

2. Die Verschiebung ist im allgemeinen eine Funktion sowohl des Orts, des Radiusvektors $\vec{r}$, als auch der Zeit t:

$$\vec{s} = \vec{s}(\vec{r},t) \tag{2.1}$$

Nur bei stationärer Strömung darf $d\vec{s}$ gleich $d\vec{r}$ gesetzt werden.

3. Zerlegung des Geschwindigkeitsdifferentials $d\vec{w}$ in einen örtlichen, konvektiven und einen zeitlichen, lokalen Anteil ergibt:

$$d\vec{w} = d\vec{r}\ \mathrm{grad}\ \vec{w} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}\,dt \tag{2.2}$$

4. Die Beschleunigung ist die auf die Zeit bezogene Geschwindigkeit:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\ \mathrm{grad}\ \vec{w} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \tag{2.3}$$

Hier darf $d\vec{r}/dt$ – entgegen der Lehrmeinung – nur bei stationärer Strömung durch $\vec{w} = d\vec{s}/dt$ ersetzt werden. Nur für stationäre Strömungen gilt folglich die Zerlegung:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt}\ \mathrm{grad}\ \vec{w} = \vec{w}\ \mathrm{grad}\ \vec{w} = \mathrm{grad}\frac{w^2}{2} - \vec{w}\times\mathrm{rot}\ \vec{w} \tag{2.4}$$

Anmerkung: Das allgemeine Missverständnis beruht auf einer fehlenden Unterscheidung zwischen abhängig und unabhängig Veränderlichen. Definiert man die Geschwindigkeit durch $d\vec{r}/dt$, so verwendet man $\vec{r} = \vec{r}(t)$ als abhängig Veränderliche und darf dann $\vec{r}$ in (1.2) nicht gleichzeitig als unabhängige Ortskoordinate verwenden.

5. Die als Lambvektor bezeichnete Beschleunigungskomponente $\vec{a}_L$

$$\vec{a}_L = -\vec{w}\times\mathrm{rot}\ \vec{w} \tag{2.5}$$

ist bei stationärer Strömung als Gradient von einem Potential herleitbar, wie aus folgendem ersichtlich:

In jedem wirbelfreien, einfach zusammenhängenden Vektorfeld lässt sich der Feldvektor von einem Potential herleiten. Das Wegintegral des Vektors über eine geschlossene Linie ist dann gleich null:

$$\oint \vec{A}\, d\vec{s} = 0 \tag{2.6}$$

Im stationären Fall muss das Beschleunigungsfeld ($\vec{a}$-Feld) wirbelfrei sein, in sich geschlossene Beschleunigungslinien ($\vec{a}$-Linien) darf es nicht geben. Andernfalls kann die Beschleunigung nicht durch Druckkräfte ausgeglichen sein, wie dies zur Aufrechterhaltung eines stationären Zustands erforderlich ist. Es gilt somit:

$$\text{rot}\, \vec{a} = 0 \tag{2.7}$$

woraus folgt, dass sich die Beschleunigungen in stationären Wirbeln von einem Potential E (gemessen in J/kg) herleiten lassen:

$$\vec{a} = \text{grad}\, E \tag{2.8}$$

Das führt, eingesetzt in (2.3) zu dem Ergebnis, dass im stationären Fall auch der Lambvektor von einem Potential, nämlich der Wirbel- oder Bindungsenergie γ (gemessen in J/kg) herleitbar ist:

$$\vec{a}_L = - \vec{w} \times \text{rot}\, \vec{w} = \text{grad}\, E - \text{grad} \frac{w^2}{2} = \text{grad}\, \gamma \tag{2.9}$$

Mit dieser Herleitung der Lambbeschleunigung von einem Potential γ wird es möglich, die Eulersche Beschleunigungsgleichung - entgegen der Lehrmeinung - auch dann zu integrieren, wenn die Strömung nicht wirbelfrei ist, worauf noch zurückzukommen sein wird.

Aus (2.9) folgt:

$$\gamma = - \int_1^2 (\vec{w} \times \text{rot}\, \vec{w})\, d\vec{r} \tag{2.10}$$

Die Bindungsenergie γ ist das Wegintegral der Lambbeschleunigung, stationäre Verhältnisse vorausgesetzt. Der Integrationsweg ist dabei beliebig wählbar.

3. Energie:

Aus Gründen der Energieerhaltung gilt für ein Gas mit der inneren Energie u (gemessen in J/kg), dem Druck p (N/m^2), dem spez. Volumen v (m^3/kg) und der zugeführten Wärmemenge q (J/kg) bei vernachlässigbarer kinetischer Energie der 1. Hauptsatz der Wärmelehre:

$$dq = du + p\,dv \tag{3.1}$$

Ist die betrachtete Gasmenge mit der Geschwindigkeit $\vec{w}$ wirbelfrei bewegt, so ergibt sich die auf die Masse bezogene kinetische Energie $w^2/2$ durch Integration der Eulerschen Beschleunigungsgleichung

$$\vec{a} = -\,v\ \mathrm{grad}\ p \tag{3.2}$$

$$\int \vec{a}\,d\vec{s} = \int \frac{d\vec{w}}{dt}\,d\vec{s} = \int_0^w \vec{w}\,d\vec{w} = \frac{w^2}{2} \tag{3.3}$$

$$-\int (v\ \mathrm{grad}\ p)\,d\vec{s} = -\int v\,dp \tag{3.4}$$

also:

$$d\frac{w^2}{2} = -\,v\,dp \tag{3.5}$$

was in Verbindung mit (3.1) den Energiesatz eines wirbelfrei bewegten Gases ergibt:

$$dq = d\frac{w^2}{2} + du + d(pv) \tag{3.6}$$

Mit der Enthalpie h und der Staupunktsenthalpie h_o kann man dafür auch schreiben:

$$dq = d\frac{w^2}{2} + dh = dh_o \tag{3.7}$$

Wird durch Reibung, in nicht vernachlässigbarer Weise, Wärme erzeugt, so ist (3.2) durch die Navier-Stokessche Beschleunigungsgleichung zu ersetzen, was aber am Ergebnis (3.6) nichts ändert, wenn die erzeugte Wärme der Wärmemenge q zugerechnet wird.

Integration der Eulerschen Beschleunigungsgleichung (3.2) ergibt die Bernoullische Energiegleichung, weil das Wegintegral einer Beschleunigung eine Energie ergibt. Ist die Strömung nicht wirbelfrei, so tritt in der Bernoullischen Gleichung eine Konstante auf, die sogenannte Bernoullische Stromlinienkonstante B, die von Stromlinie zu Stromlinie ihren Wert ändert und der Lehrmeinung nach nur empirisch bestimmt werden kann.

Bei Anwendung auf stationäre Wirbel erhält man mit (2.4) die Eulersche Beschleunigungsgleichung in der Form:

$$\operatorname{grad}\frac{w^2}{2} - \vec{w} \times \operatorname{rot} \vec{w} = - v \operatorname{grad} p \tag{3.8}$$

Integration ergibt unter Verwendung von (2.10):

$$\frac{w^2}{2} + \gamma = - \int v \, dp \tag{3.9}$$

Hier steht γ an Stelle von - B der Bernoullischen Gleichung. Die unverstandene Bernoullische Konstante ist somit dem Betrag nach nichts anderes als die auf die Masse bezogene, örtliche Bindungsenergie eines stationären Wirbels.

4. Wirbelkerngrenzschicht:

Erste, wenn auch wenig realistische Annäherung an einen Wirbel ist der Rankine Wirbel, ein langer gerader Wirbel, ohne achsparallele Strömungskomponente, mit einem starr rotierenden Wirbelkern, der von einem Potentialwirbel umgeben ist, in dem die Geschwindigkeiten mit 1/r abnehmen. Der Potentialwirbel ist paradox klingender Weise wirbelfrei (rot $\vec{w}$ = 0), so dass ausserhalb des Wirbelkerns Lambvektor und Wirbelenergie verschwinden. Im Kern ist die Winkelgeschwindigkeit, wegen dessen starrer Rotation, konstant und das gleiche gilt für die Rotation der Geschwindigkeit, denn bei starrer Rotation ist:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{ rot } \vec{w} \tag{4.1}$$

wobei die Winkelgeschwindigkeit ω mit der Umfangsgeschwindigkeit w_k an der Kerngrenze und dem Kernradius r_k gegeben ist zu:

$$\omega = \frac{w_k}{r_k} \tag{4.2}$$

Damit gilt für den Lambvektor $\vec{a}_L$ in Abhängigkeit vom Achsabstand r

$$\vec{a}_L = - \vec{w} \times \text{rot } \vec{w} = - 2 \frac{w_k^2}{r_k^2} \vec{r} \tag{4.3}$$

und für die Wirbelenergie γ :

$$\gamma(r) = \int \vec{a}_L \, d\vec{r} = - 2\frac{w_k^2}{r_k^2} \int_o^r r \, dr = - w_k^2 \frac{r^2}{r_k^2} \tag{4.4}$$

Bei starrer Rotation, ohne axiale Strömungskomponente, nimmt somit, gemäss (4.3), der Betrag des Lambvektors linear mit dem Achsabstand zu (Abb.1a). In Wirklichkeit tritt im Kern eine axiale Strömungskomponente auf, da aus Stabilitätsgründen die potentielle Energie einem Minimum, die kinetische Energie also einem Maximum zustrebt, sobald gewisse Bewegungshemmnisse überwunden sind.
Im Anfangszustand besitzt die axiale Strömung eine Geschwindigkeitsverteilung (Abb.1b), bis schliesslich im stabilen Endzustand im ganzen Kern die Geschwindigkeit gleich der kritischen Geschwindigkeit ist (Abb.1c). Mit wachsender Axialkomponente der Geschwindigkeit w wird der Winkel zwischen $\vec{w}$ und rot $\vec{w}$ kleiner und entsprechend kleiner wird der Lambvektor $\vec{a}_L$ (Abb.1b). Im stabilen Grenzfall sind $\vec{w}$ und rot $\vec{w}$ parallel, so dass dann der Lambvektor auch im Kern verschwindet. Ein Strömungszustand der als Beltramiströmung bezeichnet wird (Abb.1c). Mit zunehmender axialer Geschwindigkeit weitet sich das lambvektorfreie Gebiet um die Achse aus. Im stabilen Endzustand ist der Lambvektor auf eine dünne Wirbelkerngrenzschicht verdrängt. Sie wirkt bindent und verdichtend ähnlich der Oberflächenspannung eines Trop-

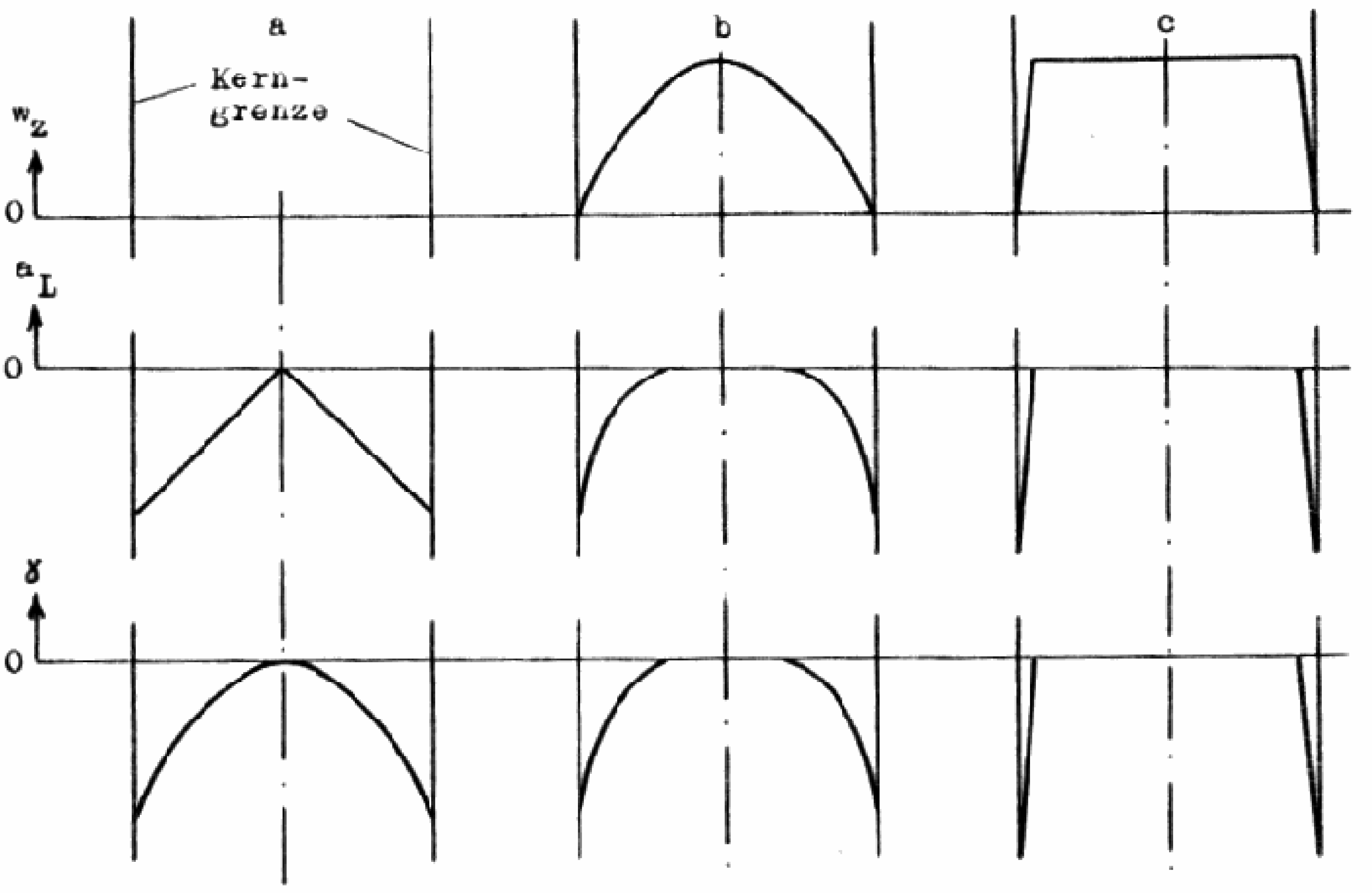


Abb.1

fens.

Bei einem voll entwickelten Tornado kann man annehmen, dass er dem stabilen Zustand nahe kommt. Von Ergebnissen der Rechnung weichen gemessene Werte allerdings erheblich ab. Luft setzt sich aus Stickstoff, Sauerstoff und Wasserdampf zusammen, was für Wirbelvorgänge solange unwesentlich ist, solange nicht Wasserdampf auskondensiert. Die bei Kondensation frei werdende Wärme bedingt eine Expansion, die aber durch das verschwindende Volumen des Wasserdampfs überkompensiert wird, so dass es zu einer Kontraktion um die Wirbelachse und damit, aus Gründen der Drehimpulserhaltung, zu einer Beschleunigung der Umlaufgeschwindigkeiten kommt. Sieht man in erster Näherung von dieser Schwierigkeit ab, so ergibt sich folgendes:

a) Wirbelfeld: Das Wirbelfeld umschliesst die Wirbelkerngrenzschicht, nach aussen ist es unbegrenzt. Bei vernachlässigbarer Wärmestrahlung und Wärmeleitung ist das Wirbelfeld isoenergetisch, d.h. die auf den Staupunkt reduzierte spez. Gesamtenergie oder Enthalpie h_o hat im ganzen Gebiet den gleichen Wert. Dasselbe gilt, wegen der Wirbelfreiheit, auch für die Entropie s, die im ganzen Gebiet mit dem Staupunktswert s_o übereinstimmt. Die Schichtung des Wirbelfelds kann im stabilen Gleichgewichtszustand als adiabatisch angesehen werden, wobei die Zustandspunkte im pv-Diagramm (Abb.3) bei radialen Fortschreiten auf einer thermodynamischen Adiabate liegen, beginnend beim kritischen Zustand $p_k v_k$ an der Wirbelkerngrenzschicht und endend mit dem Staupunkt $p_o v_o$.

Der Rechnung seien folgende Daten zugrundegelegt:

Staupunktsdruck	$p_o = 10^5$	N/m^2
Staupunktsdichte	$\rho_o = 1{,}2$	kg/m^3
spez. Staupunktsvolumen	$v_o = 0{,}9$	m^3/kg
Staupunktstemperatur	$T_o = 300$	K
Staupunktsschallgeschwindigkeit	$c_o = 350$	m/s
Verhältnis der spez. Wärmen	$\varkappa = 1{,}4$	

Die im Wirbelfeld räumlich und zeitlich konstante Gesamtenergie oder Enthalpie h_o ergibt sich damit zu:

$$h_o = u_o + p_o v_o = c_v\, T_o + p_o v_o = \frac{c_v\, p_o v_o}{R} + p_o v_o = \frac{c_p}{c_p - c_v}\, p_o v_o =$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\, p_o v_o = 3{,}0 \cdot 10^5 \quad J/kg \qquad (4.5)$$

Für den kritischen Druck p_k an der Aussenseite der Wirbelkerngrenzschicht erhält man:

$$p_k = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} p_o = 0{,}53 \cdot 10^5 \quad N/m^2 \qquad (4.6)$$

was einer Druckabsenkung gegenüber p_o um 47% entsprechen würde. Gemessen wurden etwa 20% Druckabsenkung. Für die kritische Temperatur T_k ergibt sich:

$$T_k = \frac{2}{\varkappa + 1}\, T_o = 250 \ K \qquad (4.7)$$

was einer Temperaturabsenkung gegenüber T_0 um 50 Grad entspricht. Da es im Tornadokern regelmässig hagelt, ist im Kerninneren näherungsweise eine Temperaturabsenkung dieser Grösse möglich. Im betrachteten Wirbelfeld dürften die Temperaturabsenkungen geringer sein. Genaue Messungen liegen nicht vor. Die kritische Geschwindigkeit w_k an der Kerngrenzschicht ist rechnungsmässig gegeben zu:

$$w_k = \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa + 1}}\, c_0 = 270 \text{ m/s} = 960 \text{ km/h} \tag{4.8}$$

Gemessen wurden Geschwindigkeiten bis zu etwa 700 km/h. Schliesslich gilt für die kritische Dichte:

$$\rho_k = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \rho_0 = 0{,}76 \text{ kg/m}^3 \tag{4.9}$$

was einer Abnahme gegenüber der Staupunktsdichte ρ_0 um rd. 35% entspricht. Geeignete Messgeräte zur Bestimmung der Luftdichte scheint es derzeit nicht zu geben, Messergebnisse an Tornados sind jedenfalls nicht bekannt.

b) Wirbelkerngrenzschicht: Personen, welche in das Innere eines Tornadokerns blicken konnten, berichten von Wirbelfäden, die an den Wänden zu hängen schienen, und von Atembeschwerden. Letztere haben offensichtlich ihre Ursache in der Verdichtung des Kerns durch die Wirbelkerngrenzschicht. Der thermodynamische Zustand innerhalb und ausserhalb der Grenzschicht ist verschieden, und der unterschiedliche Bewegungszustand wird durch die Grenzschicht nach Art eines Walzenlagers ausgeglichen, wobei Wirbelfäden die Rolle der Walzen übernehmen. Dem Magnuseffekt entsprechend üben die Wirbelfäden in Verbindung mit ihrer Fortbewegung Kräfte wie bei einem Flettnerrotor aus. Mathematisch sind sie durch die Lambbeschleunigung bestimmt. In der Wirbelkerngrenzschicht sind die Wirbelfäden wendelförmig angeordnet, was durch Beobachtungen bestätigt wird. Zur Vereinfachung der Rechnung sei aber angenommen,

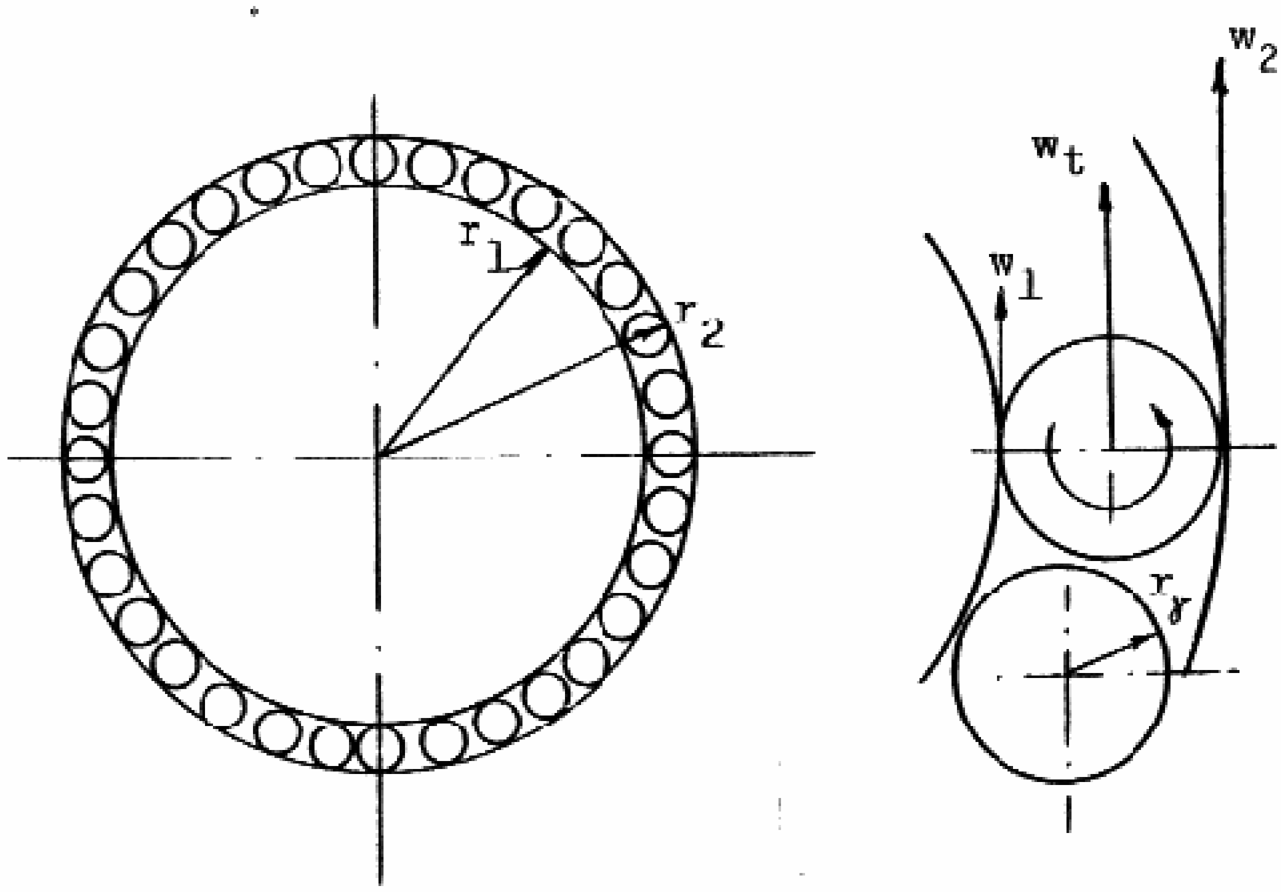


Abb.2

dass sie näherungsweise achsparallel ausgerichtet sind. Einen nichtmasstäblichen Querschnitt zeigt Abb.2.

Die Translationsgeschwindigkeit w_t eines Fadens ist:

$$w_t = \frac{w_1 + w_2}{2} \qquad (4.10)$$

und für die Winkelgeschwindigkeiten der Fäden gilt:

$$\omega = \frac{w_2 - w_1}{2\ r_\gamma} \qquad (4.11)$$

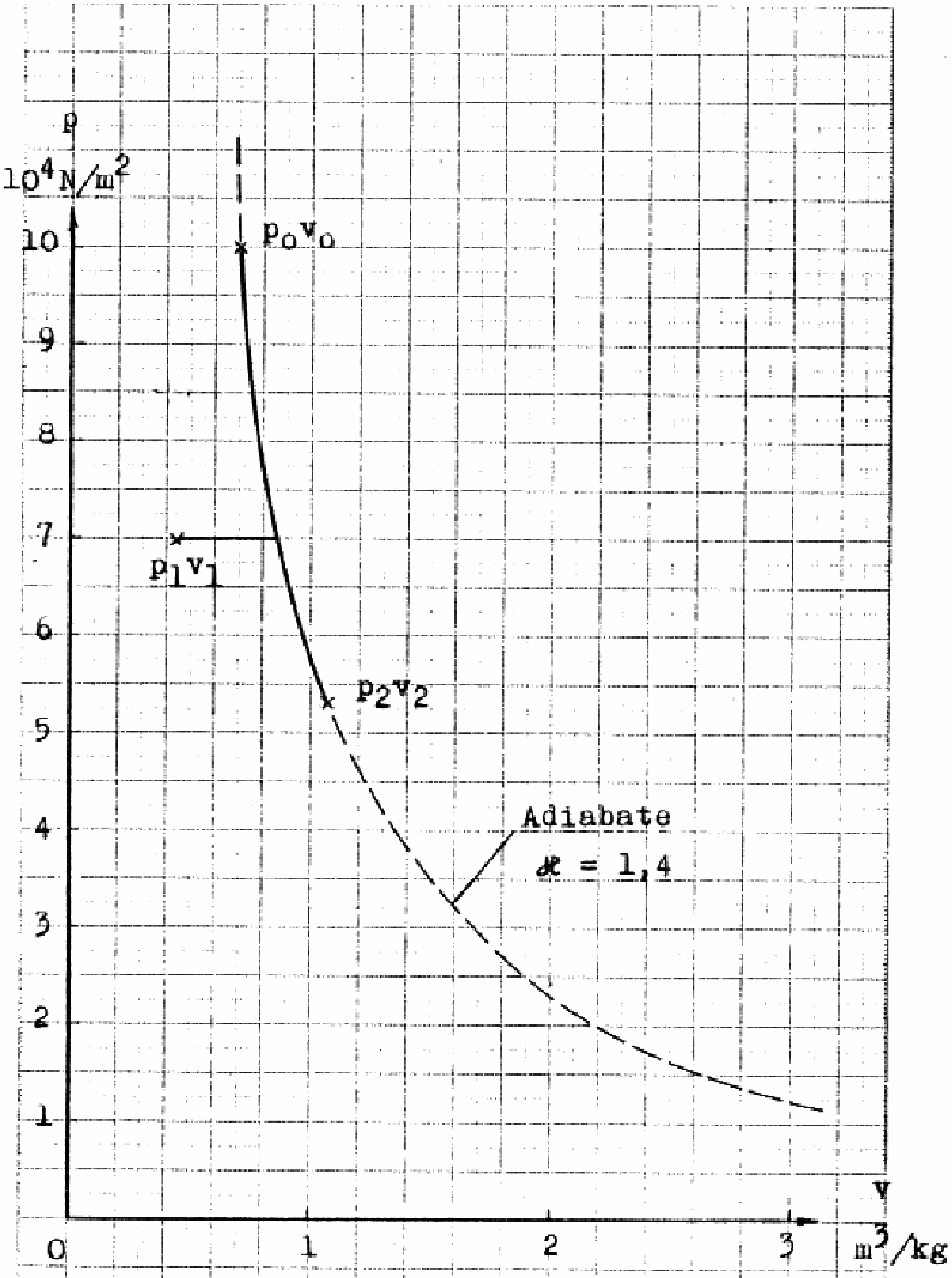
Es folgt für den Lambvektorbetrag:

$$a_L = -\left|\vec{w} \times \mathrm{rot}\ \vec{w}\right| = -\ w_t\ 2\,\omega = -\ \frac{w_2^2 - w_1^2}{2\ r_\gamma} \qquad (4.12)$$

und für die Wirbelenergie γ, da w_1 und w_2 im stabilen Zustand kritische Geschwindigkeiten sind:

$$\gamma = \int \vec{a}_L\ d\vec{r} = -\ \frac{w_2^2 - w_1^2}{2\ r_\gamma}\Delta r = -(w_2^2 - w_1^2) = -\ \varkappa\ (p_2 v_2 - p_1 v_1) \qquad (4.13)$$

Bei spontaner Wirbelbeschleunigung wird Bindungsenergie frei, die teils in Bewegungsenergie umgesetzt, teils an die Umgebung abgegeben, bzw. abgestrahlt wird, vorwiegend wahrscheinlich durch Schwingungen im Hörbereich. Die Umwandlung in Bewegungsenergie ist daher nicht adiabatisch oder isentrop und zudem auch nicht isoenergetisch, weil durch Abstrahlung, ähnlich wie



p_0v_0 Ruhezustand (Staupunkt)

p_1v_1 Grenzschicht (Innenseite, Wirbelkern)

p_2v_2 kritischer Zustand

Abb. 3

bei Wärmeleitung, auf die Masse bezogene Gesamtenergie an die Umgebung abgegeben wird. Die Werte für die Staupunktsenthalpie h_o die kritische Geschwindigkeit c_k und für das entsprechende Produkt $p_k v_k$ sind daher auf der Innenseite der Wirbelkerngrenzschicht kleiner als auf deren Aussenseite. Die Zustandspunkte der Wirbelkerngrenzschicht liegen folglich unter der Isotherme durch $p_k v_k$. Wegen der einsetzenden Kondensation im Kern eines Tornados, kann man annehmen, dass diese Punkte im pv-Diagramm auf einer Horizontalen gleichen Drucks und gleicher Temperatur liegen. Sie ist nicht durch $p_k v_k$ eingezeichnet, sondern durch einen der Null-Grad-Grenze entsprechenden Punkt. Die Druckabsenkung beträgt dabei etwa 30%, was der Druckabsenkung auf einem rd. 3000 m hohen Berg entspricht. Bei im vorliegenden Sonderfall konstantem Druck wird die Fliehkraft der Grenzschicht durch die Lambbeschleunigung ausgeglichen. Allgemein ist jedoch der Druck im Kern erhöht, so dass dann die Lambbeschleunigung ausser der Zentrifugalbeschleunigung auch der Druckbeschleunigung das Gleichgewicht halten muss.

Es liegt nahe, aus der Luftfahrt bekannte Luftlöcher mit Wirbeln in Verbindung zu bringen. Der für den Auftrieb eines Flügels bestimmende Staudruck bleibt zwar bei Annäherung an einen Wirbel ungeändert, die axiale Strömungskomponente eines Wirbels kann aber, falls abwärts gerichtet, ein Luftloch vortäuschen. Eine aufwärts gerichtete axiale Strömungskomponente hat eine vergleichsweise schwächere Wirkung, weil dann die Schwerkraft dem Auftrieb entgegen wirkt.

5. Entropie:

Das Verständnis der Entropie setzt die Klärung zweier Begriffe voraus:

1. Reversibilität einer Zustandsänderung,
2. Vollständigkeit eines Differentials.

1. Als reversibel gelten Zustandsänderungen, die so langsam verlaufen, dass die erzeugte kinetische Energie in jedem Augenblick vernachlässigbar ist. Das schränkt den Begriff der Reversibilität unzulässig ein. Richtigerweise hat man Zustandsänderungen als reversibel zu bezeichnen, wenn die Erzeugung von Wirbeln und Reibungswärme vernachlässigbar ist. Die Expansion in einer Lavaldüse erfolgt z.B. reversibel, trotzdem die Strömungsgeschwindigkeit im engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit erreicht. Auch die Zustandsänderungen in einer Schallwelle sind, bei nicht vernachlässigbarer kinetischer Energie, reversibel.

2. Das vollständige Differential einer Funktion z zweier Veränderlicher, x und y, ist:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \tag{5.1}$$

Ein Differential der Form:

$$dz = Q\, dx + P\, dy \tag{5.2}$$

ist demnach vollständig, wenn die Bedingung

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} \tag{5.3}$$

erfüllt ist, was auf der Vertauschbarkeit der Reihenfolge partieller Differentiationen beruht. Zur Veranschaulichung sei ein Gas betrachtet, das der idealen Gasgleichung genügt:

$$T = \frac{p\, v}{R} \qquad\qquad dT = \frac{p}{R}\, dv + \frac{v}{R}\, dp \tag{5.4}$$

Gemäss (5.3) ist das Temperaturdifferential dT ein vollständiges Differential, T also eine Zustandsfunktion: Jedem Punkt im pv-Diagramm entspricht eine bestimmte Temperatur, Punkte gleicher Temperatur liegen auf Isothermen. Integration von dT zwischen zwei Punkten ergibt eine bestimmte, diesen Punkten entsprechende Temperaturdifferenz ΔT, unabhängig von der Art der Zustandsänderung bzw. von der Wahl des Integrationswegs im pv-Diagramm.

Dagegen hat die Arbeit W der Druckkräfte, bei einer Zustandsänderung zwischen den gleichen Punkten, einen von der Art der Zustandsänderung und damit vom Verlauf der Zustandslinie abhängigen Wert, der im pv-Diagramm durch die Fläche unter der Zustandslinie gegeben ist:

$$W = \int_1^2 p\, dv \tag{5.5}$$

Die Arbeit W ist also keine Zustandsfunktion und p dv ist damit auch kein vollständiges Differential.

Ebenso wie dT ist bei als konstant vorausgesetzter spez. Wärme auch du ein vollständiges Differential. Dagegen ist mit p dv, wie aus dem 1. Hauptsatz (3.1) ersichtlich, auch das Differential dq der zugeführten Wärmemenge unvollständig. Das unvollständige Differential (3.1)

$$dq = du + R \frac{dv}{v} T \tag{5.6}$$

verwandelt sich in ein vollständiges Differential, wenn man es mit einem integrierenden Faktor, hier $1/T$, multipliziert:

$$\frac{dq}{T} = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \tag{5.7}$$

Da rechts vollständige Differentiale von Zustandsfunktionen stehen, muss dies auch für die linke Seite gelten. Für reversible Zustandsänderungen ist damit eine Zustandsfunktion definiert, die als

Entropie s bezeichnet wird:

$$ds = \frac{dq_r}{T} \qquad (5.8)$$

der Index r bezieht sich auf die vorausgesetzte Reversibilität, womit im vorliegenden Zusammenhang die Beschränkung auf Potentialströmungen eines homogenen Mediums gemeint ist. Reibung, Wärleitung, Wärmestrahlung, Schallemission und -absorption, Verdichtungsstösse und Wirbelbildung sind damit ausgeschlossen, d.h. auftretende Zustandsänderungen sind notwendig isoenergetisch, die Gesamtenergie oder Staupunktsenthalpie muss erhalten bleiben, wie z.B. bei adiabatischen Zustandsänderungen, wo Wärme weder zu- noch abgeführt wird, es also nur zu einem inneren Austausch von kinetischer und potentieller Energie kommt - was bei Umwandlung von potentieller Wärme- oder Druckenergie in kinetische Energie keinen Widerspruch zum 2.Hauptsatz der Wärmelehre darstellt, weil adiabatische Zustandsänderungen unter den getroffenen Voraussetzungen gleichzeitig isentropisch (ds = 0) sind - oder bei isothermen Zustandsänderungen, die ebenfalls isoenergetisch verlaufen, weil sich hierbei zu- oder abgeführte Wärmemengen mit abgegebenen oder aufgenommenen äusseren Arbeitsleistungen ausgleichen.

Vorgänge, die nicht in obigen Sinn reversibel sind, sind stationär, dissipativ oder, wie bei Wirbelbildung, antidissipativ. Die gebräuchliche Bezeichnung dissipativer Vorgänge als irreversibel, die auf einer unzulässigen Verallgemeinerung des 2.Hauptsatzes beruht, leugnet, entgegen vielfachen Erfahrungen, spontane Wirbelbildungen, wie sie z.B. in superflüssigen Helium, in der Sonnen- und Erdatmosphäre und in der Atmosphäre sonnenferner Planeten beobachtet werden. Das spontane Auftreten unverstandener Wirbel wird indirekt von Starr (MIT) durch seinen, als gescheitert zu betrachtenden Versuch bestätigt, Wirbelbildungen bei dogmatischen Festhalten am 2.Hauptsatz auf eine von ihm erfundene "negative Wirbelviskosität" zurückzuführen [1].

Jedes reale Medium besitzt, auch wenn es als ideales Gas verstanden werden kann, eine positive Zähigkeit oder Viskosität. Bei einem idealen Gas wird gaskinetisch vorausgesetzt, dass die einzelnen Partikel durch elastische Stösse Impuls austauschen können, sonst aber keinen Wechselwirkungen unterliegen. Das genügt bereits, um eine vom Zustand abhängige Zähigkeit zu berechnen.

Wirbel entstehen um so leichter, je geringer die Zähigkeit des Mediums ist. Am leichtesten in superflüssigem Helium. Gänzlich ohne Schubspannungen und Reibung können Wirbel nicht entstehen und nicht verschwinden. Das klingt widersprüchlich, besagt aber nur, dass der Bereich, in welchem die Reibung durch die dem Gradienten der Wirbelenergie entsprechende Beschleunigung überwunden werden kann, extrem kleine Zähigkeiten einschliesst.

Kann sich in einem Medium gegebener Zähigkeit ein Wirbel bis zum stabilen, stationären Zustand entwickeln, so wird die Zähigkeit unwirksam:

1. Der Potentialwirbel ist nicht nur eine per Definition reibungsfreie Idealisierung. Für eine zylindersymmetrische Strömung, deren Geschwindigkeit w mit C/r abnimmt, verschwindet in der Navier-Stokesschen Beschleunigungsgleichung das dissipative Zusatzglied $\vec{a}_d$:

$$\vec{a}_d = \eta\,(\text{grad div } \vec{w} - \text{rot rot } \vec{w}) \tag{5.9}$$

denn in Zylinderkoordinaten gilt für div $\vec{w}$:

$$\text{div } \vec{w} = - \frac{\partial (r w_r)}{\partial r} = \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} = - \frac{C}{r^2} + \frac{C}{r^2} = 0 \tag{5.10}$$

und für die z-Komponente von rot $\vec{w}$:

$$(\text{rot } \vec{w})_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r w_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi}\right) = - \frac{C}{r^2} + \frac{C}{r^2} = 0 \tag{5.11}$$

die beiden anderen Komponenten von rot w verschwinden aus Symmetriegründen.

2. In der Wirbelkerngrenzschicht treten keine Schubspannungen auf. Gleitende Reibung wird hier durch rollende Bewegungen der die Grenzschicht bildenden dünnen Wirbelfäden ersetzt.
3. Die Beltramiströmung im Wirbelkern kann in erster Näherung als Zusammensetzung einer starren Rotation und einer axialen Verschiebung verstanden werden, was innere Reibung ausschliesst.

Für stationäre Wirbel tritt damit an die Stelle der Navier-Stokesschen Beschleunigungsgleichung wieder die Eulersche Beschleunigungsgleichung (3.8). Die grosse Beständigkeit von Wirbeln im atomaren und subatomaren Bereich, von Ringgalaxien aber auch von Raucherringen, die sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit über weite Strecken bewegen, bestätigt die Reibungsfreiheit stabilisierter Wirbelringe.

In Wirbeln ist die Strömung nicht isoenergetisch. In einem stationären Wirbel ist die Staupunktsenthalpie h_o zwar in jedem Punkt zeitlich konstant, unterliegt aber einer örtlichen Verteilung (grad $h_o \neq 0$). Entsprechendes gilt für andere Zustandsvariable des stationären Wirbels. Damit verbunden ist eine kleine Schwierigkeit, die es zu klären gilt, um Missverständnisse zu vermeiden:

Da dissipative Verluste nicht auftreten, gilt für den stationären Wirbel entsprechend (5.8):

$$dq = T\ ds \tag{5.12}$$

Sind beim Durchgang eines Masseteilchens durch einen Wirbelring die auftretenden Zustandsänderungen adiabatisch, oder treten keine Zustandsänderungen auf, wie bei Potentialwirbeln, so verschwinden die substantiellen Änderungen dq und ds. Zudem sind im stationären Wirbel auch alle lokalen Änderungen, also die partiellen zeitlichen Ableitungen, gleich null. Wenn gleichzeitig substantielle und lokale Änderungen verschwinden, so verschwinden auch die konvektiven Änderungen, z.B. $\vec{w}$ grad s. Da weder $\vec{w}$ noch grad s verschwinden, muss grad s auf den Stromlinien senkrecht stehen. Ableitung von (5.12) nach einer zur Stromlinie senkrechten Richtung ergibt:

$$\text{grad } q = T \text{ grad } s \tag{5.13}$$

d.h. für stationäre Wirbel wird q zu einer Zustandsfunktion, die für jeden Punkt die Wärmemenge angibt, die während des Bildungsvorgangs insgesamt zu- oder abgeführt wurde.

Der 1. Hauptsatz gibt in differentieller Form (3.1) substantielle Differentiale. Durch räumliche Ableitung, durch Gradientenbildung, erhält man den 1. Hauptsatz in der Form:

$$\text{grad } q = T \text{ grad } s = \text{grad } u + p \text{ grad } v \tag{5.14}$$

Vereinigung mit der Eulerschen Beschleunigungsgleichung (3.8) ergibt den Energiesatz stationärer Wirbel:

$$T \text{ grad } s = \text{grad} \frac{w^2}{2} + \text{grad } u + \text{grad}(pv) - \vec{w} \times \text{rot } \vec{w} \tag{5.15}$$

Fasst man die ersten drei Glieder der rechten Seite zusammen, so erhält man die Wirbelgleichung von Vazsonyi:

$$T \text{ grad } s = \text{grad } h_o - \vec{w} \times \text{rot } \vec{w} \tag{5.16}$$

Eingang in Lehrbücher findet meist nur eine verkürzte Form, der Wirbelsatz von Crocco:

$$T \text{ grad } s = - \vec{w} \times \text{rot } \vec{w} \tag{5.17}$$

der das grundsätzlich nicht isoenergetische Verhalten von Wirbeln nicht zum Ausdruck bringt und dementsprechend nur auf Wirbel anwendbar ist, die so schwach sind, dass die Absenkung der Staupunktsenthalpie h_o vernachlässigt werden kann.

Führt man in die Vazsonyigleichung mit (2.9) den Gradienten der Wirbelenergie γ ein, so erhält man die Fundamentalgleichung stationärer Wirbel:

$$T \text{ grad } s = \text{grad } h_o + \text{grad } \gamma \tag{5.18}$$

die sich von der Gibbsschen Fundamentalgleichung chemischer Reaktionen im wesentlichen nur dadurch unterscheidet, dass an die Stelle der chemischen Potentiale, das Potential γ der Lambbeschleunigung tritt. Multipliziert mit einem Wegelement ergibt (5.18):

$$T\, ds = dh_o + d\gamma \tag{5.19}$$

Da rechts nur vollständige Differentiale stehen, ist auch T ds, bzw. dq, ein vollständiges Differential und somit q eine Zustandsfunktion des stationären Wirbels, worauf bereits hingewiesen wurde.

6. Spontane Wirbelbildung:

1. Grossräumig ist absolute Wirbelfreiheit in einem gasförmigen oder flüssigen Medium ein nicht realisierbarer Grenzfall.

2. Bei Wirbelfreiheit erzeugen Dichteänderungen entgegenwirkende Druckkräfte. Entstehende Schwingungen sind gedämpft. Kinetische Energie verwandelt sich letztlich in potentielle Energie.

3. Umgekehrt verwandelt sich potentielle Energie - aus Gründen der Drehimpulserhaltung - in kinetische Energie, wenn ein Wirbel verdichtet wird, bis bei Eintritt des kritischen Zustands ein Maximum an kinetischer und ein Minimum an potentieller Energie erreicht und damit der Zustand stabilisiert ist.

4. Spontan, also unabhängig von äusseren Einwirkungen, setzt sich, nach allfälliger Überwindung einer Zähigkeitsschwelle, eine stabilisierende Wirbelbeschleunigung fort, wenn die Zustandsänderungen eines Masseteilchens mit einer Abnahme des Produkts pv verbunden sind.

5. Kann, wie in der Regel, mit konstanter spez.Wärme gerechnet werden, so gilt für Zustandsänderungen eine Polytropengleichung, mit dem Polytropenexponenten n.

6. Soll bei zunehmender Dichte und zunehmenden, allenfalls gleichbleibenden Druck im Wirbelinneren das Produkt pv abnehmen,

so muss der Polytropenexponent n zwischen null und eins liegen:

$$0 < n < 1 \tag{6.1}$$

7. Im pv-Diagramm verlaufen diese Polytropen flacher als Isotherme, im Bereich zwischen Isotherme und Isobare (Abb.4). Mit fortschretendem Bildungsvorgang wachsen Dichte und Druck des Kerns und entsprechend wächst – vom isobaren Zustand mit $n=0$ beginnend – die Steigung der Polytrope.

8. Den Teilchen des Wirbelfelds entsprechen Zustandspunkte, die auf der durch den Staupunkt $p_0 v_0$ gehenden Adiabate liegen. Bei Wirbelbildung wandern die Zustandspunkte – mit wachsender Annäherung an den Kern – auf dieser Adiabate nach unten, in Richtung auf den kritischen Punkt $p_k v_k$.

9. Die Zustandspunkte der Teilchen der Wirbelkerngrenzschicht liegen auf einer Polytrope durch $p_k v_k$. Die Teilchen wandern bei Wirbelbildung auf spiralförmigen Bahnen durch die Grenzschicht in den Kern, wobei die Zustandspunkte nach links bzw. oben wandern, bis bei Übertritt in den Kern der Endpunkt auf der Polytrope erreicht ist.

In Schallwellen verlaufen Zustandsanderungen schnell. Gegenüber lokalen, zeitlichen Änderungen sind daher konvektive, räumliche Änderungen in Schallwellen meist vernachlässigbar. Bei Wirbelbildungen liegen die Verhältnisse umgekehrt. Die Zustandsänderungen verlaufen hier langsam, quasistationär, so dass lokale Änderungen gegenüber konvektiven vernachlässigt werden können, substantielle Änderungen somit für konvektive gesetzt werden dürfen. Für den Bildungsvorgang folgt aus (5.18) eine mit (5.19) formal übereinstimmende, aber substantiell zu verstehende Gleichung, die wegen der auftretenden Zähigkeitswirkungen um ein dissipatives Glied dq_d zu erweitern ist:

$$T\,ds + dq_d = dq + dq_d = dh_o + d\gamma \qquad (6.2)$$

Auch das Wirbelfeld eines entstehenden oder verschwindenden Wirbels kann in erster Näherung als Potentialwirbel verstanden werden. Ein Potentialwirbel ist zwar wirbelfrei, besitzt aber einen Drehimpuls, hervorgerufen durch die Bewegungen der Masseteilchen um die Wirbelachse. Bei Erzeugung und Vernichtung eines Wirbels müssen Änderungen dieses Drehimpulses ausgeglichen sein. Da im Inneren eines Mediums nur in sich geschlossene Wirbellinien entstehen und verschwinden können, sich bildende Wirbel also Ringform besitzen, erfolgt dieser Drehimpulsausgleich zwangsläufig, wie man erkennt, wenn man einen Schnitt des Wirbelrings, senkrecht zur Ringebene, betrachtet. Wegen seiner achsparallelen Strömungskomponente besitzt der stabile Wirbelring einen Spin, einen Drehimpuls bezüglich der zur Ringebene senkrechten Achse, der bei Wirbelentstehung und -vernichtung ebenfalls ausgeglichen sein muss, z.B. durch paarweise Wirbelbildung oder -vernichtung.

Beginnend mit einem stets vorhandenen Wirbelkeim entwickelt sich ein Wirbel zunächst durch äussere Kompression. Eigenartigerweise bewirkt sie für das einzelne spiralförmig nach innen bewegte Masseteilchen eine adiabatische Expansion, zufolge, aus Gründen der Drehimpulserhaltung, wachsender Geschwindigkeiten. Verdichtet wird dabei nur der Wirbelkern.

Im äusseren Wirbelfeld bleiben die Geschwindigkeiten örtlich erhalten, d.h. der Geschwindigkeitszuwachs eines Teilchens ist hier gerade gross genug, um die Geschwindigkeit des verdrängten Teilchens zu erreichen. Im achsnahen Bereich wachsen dagegen nicht nur die substantiellen, sondern auch die örtlichen Geschwindigkeiten. Es bildet sich eine Wirbelkerngrenzschicht, unter deren Einfluss sich Beschleunigung und Kernverdichtung spontan, unabhängig von äusseren Einwirkungen, fortsetzen, bis

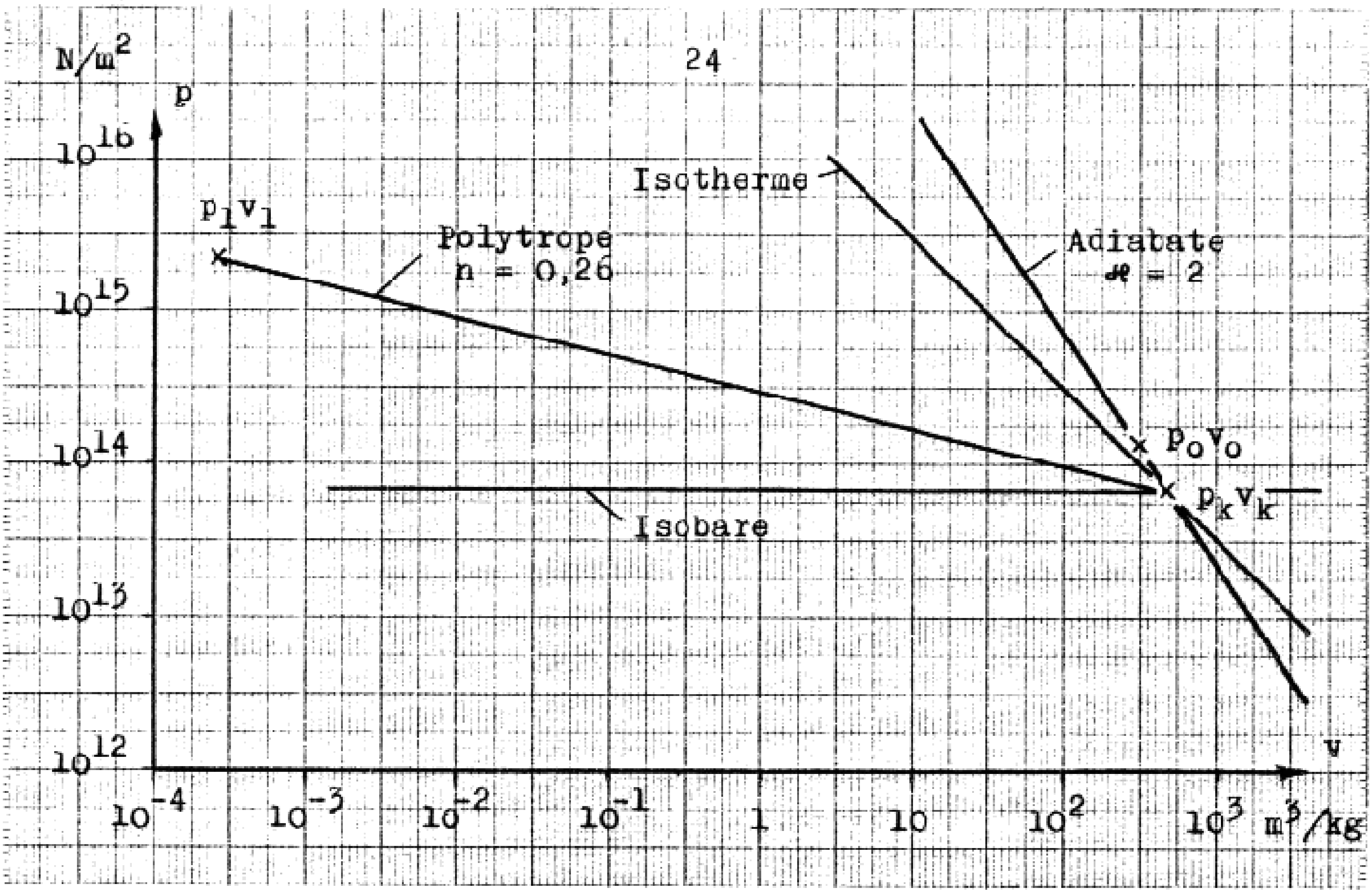


Abb. 4

im stabilen Zustand auch im Kern die kritische Geschwindigkeit erreicht ist. Wegen der abgesenkten Staupunktsenthalpie ist die kritische Geschwindigkeit des Kerns sehr viel kleiner als die kritische Geschwindigkeit des Wirbelfelds.

Zustandsänderungen im Wirbelfeld erfolgen isoenergetisch: Ohne mit der Umgebung Wärme oder mechanische Arbeit auszutauschen wird Wärme in kinetische Energie verwandelt. Das steht, wegen der Reversibilität des adiabatischen Vorgangs, nicht in Widerspruch zum 2. Hauptsatz der Wärmelehre.

Im pv-Diagramm wird bei logarithmischer Teilung auch eine Polytrope zu einer Geraden. Die jeweilige Polytrope der Grenzschicht geht - sofern keine Phasenumwandlungen auftreten - durch den Punkt $p_k v_k$ der Wirbelfeldadiabate. Damit kann die stabile Grenzlage der Polytrope (Abb.4) gezeichnet werden, wenn man den Zustandspunkt des stabilen Kerns kennt. Die der Abbildung 4 zugrundegelegten Daten beziehen sich auf den Elektronenwirbel [2].

Während des Bildungsvorgangs wird unter der Wirkung der Lambbeschleunigung Masse durch die Grenzschicht in den Kern gedrückt. Die hierfür auf einer Polytrope zu leistende Arbeit W ist im pv-Diagramm (Abb.4) durch die Fläche unter der Polytrope gegeben:

$$W = \int p\,dv = p_k v_k^n \int \frac{dv}{v^n} = \frac{1}{1-n}(p_1 v_1 - p_k v_k) \qquad (6.3)$$

d.h., da $p_1 v_1$ gegen $p_k v_k$ vernachlässigbar ist, dass W negativ ist, Arbeit also zugeführt wird.

Der Zusammenhang zwischen zugeführter Wärmemenge q und abgegebener, geleisteter Arbeit W ist bei polytropischer Zustandsänderung:

$$q = \frac{\varkappa - n}{\varkappa - 1} W \qquad (6.4)$$

wegen $\varkappa > 1 > n$ wird mit W auch q negativ, d.h. Wärme wird abgegeben.

Für die auftretende Differenz der Staupunktsenthalpie Δh_o gilt:

$$\Delta h_o = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}(p_1 v_1 - p_k v_k) \qquad (6.5)$$

Mit den Werten für $q, \Delta h_o$ und den für γ gefundenen Wert (4.13) ist die Integralgleichung zu (6.2) bereits in erster Näherung erfüllt, so dass man annehmen kann, dass dem dissipativen Glied, trotz seiner grundsätzlichen Bedeutung, zahlenmässig kein grosses Gewicht zukommt.

Wärme kann aus dem Kernbereich nicht durch Wärmeleitung oder Wärmestrahlung abgeführt werden. Da Tornados ein ausserordentlich starkes Geräusch erzeugen, liegt die Annahme nahe, dass die Energieabgabe auf Abstrahlung longitudinaler Wellen beruht.

In einer fortschreitenden, ebenen, longitudinalen Welle - und in einiger Entfernung von der Quelle kann jede Schallwelle als ebene, eindimensionale Welle angesehen werden - sind Dichte- und Druckänderungen mit den Verschiebungsgeschwindigkeiten in Phase, und mit gleicher Phase schwingen auch die Änderungen des spez. Volumens, d.h. Abweichungen des spez. Volumens vom Mittelwert erreichen im gleichen Augenblick ihren Grösstwert, indem auch die Druckabweichung ihren Grösstwert erreicht. Die dem Produkt pv proportionale potentielle Energie und die dem Quadrat der Verschiebungsgeschwindigkeit proportionale kinetische Energie gleichen sich nicht gegenseitig aus, sondern sie addieren sich. Potentielle und kinetische Energie schwingen phasengleich. Die Gesamtenergie (Staupunktsenthalpie) unterliegt damit periodischen Änderungen, die sich mit der Phasengeschwindigkeit der Welle fortpflanzen und den Energietransport der Welle verursachen. Die Zustandsänderungen sind also nicht isoenergetisch und damit - entgegen der Lehrmeinung - weder adiabatisch noch isentrop.

Angemerkt sei, dass auch bei transversalen, fortschreitenden Wellen der Energietransport - entgegen der Lehrmeinung - mit Phasengeschwindigkeit erfolgt. Die Energie- oder Signalgeschwindigkeit kann daher die Vakuumlichtgeschwindigkeit überschreiten, was der Relativitätstheorie den Boden entzieht. Zu berücksichtigen ist in diesem Zusammenhang, dass der Interferenzversuch von Michelson über die Existenz des Äthers nur dann eine Aussage macht, wenn sichergestellt ist, dass der Äther im Nahbereich der Erde nicht - ähnlich der Atmosphäre - mit der Erde mitbewegt ist. Zu diesem Zweck wurde der Rotationsversuch von Sagnac mit ortsfesten Spiegeln ausgeführt, um so die Rotation der Erde gegenüber einem nicht mitrotierenden Äther nachzuweisen. Michelson und Gale haben seinerzeit behauptet, dass ihnen dieser Nachweis gelungen sei, was mit dem Laserringgyroskop heute widerlegt werden kann.

Entropie kann nicht nur erzeugt, sondern - entgegen der Lehrmeinung - auch vernichtet werden: Für eine Entropiebilanz ist es gleichgültig, in welcher Form und mit welchen Mitteln eine Wärmemenge von einem Körper auf einen anderen übertragen wird. Sind zwei sonst gleiche Kugeln unterschiedlich stark erhitzt, so kann Wärmestrahlung der kälteren Kugel mit einem Hohlspiegel auf die heissere Kugel übertragen werden, was insgesamt, unter leicht erfüllbaren Bedingungen, mit Entropievernichtung verbunden ist.

Die Temperatur eines Wirbelkerns ist gegenüber der Umgebung stets abgesenkt. Sonnenflecken, Hagel in Tornadoschläuchen, Kondensstreifen, hervorgerufen durch Wirbel, die sich an den Enden von Flugzeugflügeln ablösen, veranschaulichen diese Temperaturabsenkung. Die Übertragung von Gesamtenergie vom Kern eines in Bildung begriffenen Wirbels auf die Umgebung bewirkt, bei niedrigerer Temperatur eine Entropieabnahme des Kerns, die grösser ist als die bei höherer Temperatur erfolgende Entropiezunahme der Umgebung, so dass insgesamt Entropie vernichtet wird, entgegen der Aussage des 2.Hauptsatzes der Wärmelehre.

[1] V.P.Starr: Physics of Negative Viscosity Phenomena, 1961

[2] W.M.Bauer: Wirbelelektron, 1985

ISSN 0256-1867

Reihe: KLASSISCHE PHYSIK

Wilhelm M. Bauer

derzeit sind lieferbar:

Kritik der modernen Physik

Grundlagen der Wirbelphysik

Wirbelatome

Isotopenatlas H - Kr

Isotopenatlas Kr - Rn

Wirbelelektron

Wirbelnukleon

Thermische Strahlung

Gravitation

Preis je Heft: DM 5,- (öS 30,-)